ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 6, 1972 Механика

Н. Г. АСРЯН

УДАР ТВЕРДОЙ ПЛАСТИНКИ О ПОВЕРХНОСТЬ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ МЕЖДУ НИМИ ГАЗОВОГО СЛОЯ

В работах, посвященных ударам тел о поверхность жидкости (например, в [1] и т. д.), не принималось во внимание наличие между телом и жидкостью какой-нибудь среды. Наличие такого фактора будет соответствовать реальным условиям задачи и существенно влиять на распределение давления по пластинке в момент удара.

В данной статье рассматривается удар твердой пластинки о жидкость при наличии между ними некоторого газа.

В первом параграфе газ принимается несжимаемым. Рассматривается аналитическая функция $G(z, t)$, регулярная в нижней полуплоскости и представляемая в виде интеграла типа Коши, действительная часть которой на оси x совпадает со значением потенциала скоростей движения жидкости на той же оси. При помощи интеграла Лагранжа осуществляется связь между этим значением потенциала скоростей и давлением газового слоя. В конечном счете задача приводится к решению нелинейного интегрального уравнения относительно функции распределения давлений в газовом слое.

Во втором параграфе газ рассматривается сжимаемым. Упрощением общих уравнений движения сплошной среды в газовом слое задача определения функции давления приводится к решению квазилинейного уравнения параболического типа. Решение задачи Коши для данного типа уравнения дано в работах [2, 3]. На конкретном примере, для вышеуказанных двух случаев, выполнены численные расчеты. Для этих же случаев определены моменты времени замыкания пластинки с жидкостью и распределение давления в газовой подушке.

1. Пусть бесконечно длинная пластинка, имеющая ширину $2a$ и находящаяся на расстоянии δ_0 от горизонтальной поверхности покоящейся жидкости, в момент $t=0$ начала двигаться с постоянной скоростью c, направленной вертикально вниз.

Проведем перпендикулярное сечение к оси пластинки и выберем неподвижную декартову систему координат следующим образом: при $t<0$ пусть ось Ox лежит на горизонтальной поверхности жидкости и направлена вправо, а ось Oy направлена перпендикулярно к оси пластинки (фиг. 1). Рассмотрим два положения одного и того же объема газа, находящегося между пластинкой и деформированной поверхностью жидкости в момент t и $t+\Delta t$. Выделим в момент t объем V_1

газа, который к моменту $t+\Delta t$ перейдет в некоторый объем V_2. Так как газ предполагается несжимаемым, то

$$V_1 = V_2 \tag{1.1}$$

$$V_1 = V_1^{(1)} + V_1^{(2)}, \quad V_2 = V_1^{(1)} + V_2^{(1)} + V_2^{(2)} \tag{1.2}$$

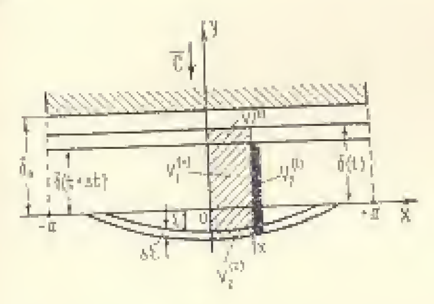
Для объема $V_1^{(2)}$ из фиг. 1 находим

$$V_1^{(2)} = \{(\delta_0 - ct) - [\delta_0 - c(t+\Delta t)]\}\, x = xc\,\Delta t \tag{1.3}$$

Пусть $\Delta\varepsilon(x, t)$—перемещение поверхности жидкости по оси Oy в период времени Δt, тогда для объема $V_2^{(2)}$ будем иметь

$$V_2^{(2)} = \int_0^x \Delta\varepsilon(\xi, t)\, d\xi = \int_0^x (v_y)_{y=0}\, \Delta t\, d\xi \tag{1.4}$$

где v_y—проекция скорости частицы газа, примыкающей к границе жидкости, на ось Oy.



Фиг. 1

Уравнение формы деформированной поверхности жидкости находится из соотношения

$$\varepsilon(x, t) = \int_0^t (v_y)_{y=0}\, d\tau \tag{1.5}$$

Для частиц газа, находящихся на вертикали в некоторой точке x, введем понятие усредненной скорости. Обозначим эту скорость через v^*, тогда для объема $V_2^{(1)}$ можно написать

$$V_2^{(1)} = [\delta_0 - c(t+\Delta t) + \varepsilon(x, t) + \Delta\varepsilon(x, t)]\, v^* \Delta t \tag{1.6}$$

Подставляя (1.2), (1.3), (1.4) и (1.6) в (1.1) и пренебрегая малыми величинами высших порядков, для скорости v^* получим

$$v^* = \frac{cx - \int_0^x (v_y)_{y=0}\, d\xi}{\delta_0 - ct + \varepsilon(x, t)} \tag{1.7}$$

Будем считать, что движение жидкости потенциально, следовательно, имеет место интеграл Коши-Лагранжа:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] = 0 \tag{1.8}$$

где p_0—давление покоящейся жидкости,

$\varphi(x, y, t)$—потенциал скоростей движения жидкости.

Основываясь на допущении, что скорости приращения плотности рассматриваемой жидкости малы, уравнение (1.8) можно линеаризовать, сохраняя только малые первого порядка.

С точностью до малых высшего порядка имеем

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho} = \frac{p - p_0}{\rho_0}$$

где ρ_0—плотность покоящейся жидкости. Пользуясь этим, уравнение (1.8) можно представить в виде

$$p - p_0 = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{1.9}$$

Соотношение (1.9) справедливо вплоть до границы жидкости, поэтому для потенциала скоростей $\varphi(x, y, t)$ будем иметь следующие граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x, y, t) = 0; \quad -\infty < x \leqslant -a, \quad +a \leqslant x < +\infty \\ &\varphi(x, y, t) = -\frac{1}{\rho_0}\int_0^t [p(x, \tau) - p_0]\, d\tau; \quad +a < x < -a \end{aligned}\right\} y = 0 \tag{1.10}$$

где $p(x, t)$—давление газа, действующее на поверхность жидкости, p_0—давление газа, действующее на покоящуюся поверхность жидкости.

Рассмотрим следующую аналитическую функцию, регулярную в нижней полуплоскости:

$$G(z, t) = \varphi(x, y, t) - i\psi(x, y, t) = -\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, t)\frac{d\xi}{\xi - z} \tag{1.11}$$

где z—комплексное переменное $z = x - iy$, а t входит как параметр.

Используя основное свойство интегралов типа Коши, находим предельное значение интеграла (1.11) при подходе к точке $z = x$ снизу. При интегрировании от $-\infty$ до $+\infty$ нижняя полуплоскость находится с правой стороны и стремление z к x снизу аналогично стремлению изнутри в случае замкнутой кривой, поэтому имея граничные

условия (1.10), для предельного значения интеграла (1.11) на действительной оси x, при стремлении z к x снизу, будем иметь:

$$G(z,\ t)\Big|_{z=x-i0}=\varphi(x,\ t)-i\psi(x,\ t)=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-a}^{+a}\varphi(\xi,\ t)\frac{d\xi}{\xi-x}+\varphi(x,\ t)$$

или иначе (1.12)

$$\operatorname{Re}[G(z,\ t)]_{z=x-i0}=\varphi(x,\ t);\quad \operatorname{Im}[G(z,\ t)]=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{+a}\varphi(\xi,\ t)\frac{d\xi}{\xi-x}=\psi(x,\ t)$$

(1.13)

Таким образом, аналитическая функция $G(z,\ t)$, регулярная в нижней полуплоскости, действительная часть которой на оси x равна $\varphi(x,\ t)$ и определяется из (1.10), выражается так:

$$G(z,\ t)=\varphi(x,\ y,\ t)-i\psi(x,\ y,\ t)=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-a}^{+a}\varphi(\xi,\ t)\frac{d\xi}{\xi-z}\qquad(1.14)$$

Интегралы в выражениях (1.12) и (1.13) понимаются в смысле главного значения.

Исходя из того, что функции $\varphi(x,\ y,\ t)$ и $\psi(x,\ y,\ t)$ удовлетворяют условиям Коши-Римана и для частиц газа, примыкающих к поверхности жидкости, справедливо соотношение $v_y=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, из (1.4) и (1.5) получим

$$V_2^{(2)}=\int\limits_0^x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0}d\xi=-\int\limits_0^x\left(-\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)_{y=0}d\xi=\psi(x,\ t)-\psi(0,\ t)$$

$$\varepsilon(x,\ t)=\int\limits_0^t\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0}d\tau=-\int\limits_0^t\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{y=0}d\tau$$

или же имея в виду (1.13)

$$V_2^{(2)}=\frac{1}{\pi}\,v.\,p.\int\limits_{-a}^{+a}\varphi(\xi,\ t)\left(\frac{1}{\xi-x}-\frac{1}{\xi}\right)\qquad(1.15)$$

$$\varepsilon(x,\ t)=\int\limits_0^t\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\pi}\,v.\,p.\int\limits_{-a}^{+a}\varphi(\xi,\ \tau)\frac{d\xi}{\xi-x}\right]d\tau\qquad(1.16)$$

Подставляя (1.15) и (1.16) в (1.7), для скорости частицы газа окончательно получим

$$v^{*} = \frac{xc - \frac{1}{\pi} v.\,p. \int\limits_{-a}^{+a} \varphi(\xi,\ t)\left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi}\right) d\xi}{\delta_0 - ct + \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\pi} v.\,p. \int\limits_{-a}^{+a} \varphi(\xi,\ \tau)\frac{d\xi}{\xi - x}\right] d\tau} \tag{1.17}$$

Для несжимаемого газа имеем интеграл Бернулли

$$\frac{p - p_0}{\rho_1} + \frac{v^{*2}}{2} = 0 \tag{1.18}$$

где ρ_1—плотность газа.

Возьмем связь между потенциалом скоростей движения жидкости и давлением газа в виде второго уравнения (1.10) и подставим (1.17) в (1.18), тогда для давления газа, находящегося между пластинкой и жидкостью, получим

$$p(x,\ t) = p_0 - \frac{\rho_1}{2} \times$$

$$\times \left\{\frac{xc + \frac{1}{\pi} v.\,p. \int\limits_{-a}^{+a}\left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi}\right) d\xi \int\limits_0^t [p(\xi,\ \tau) - p_0]\frac{d\tau}{\rho_0}}{\delta_0 - ct - \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\pi} v.\,p. \int\limits_{-a}^{+a}\frac{d\xi}{\xi - x}\int\limits_0^t [p(\xi,\ \tau) - p_0]\frac{d\tau}{\rho_0}\right] d\tau}\right\}^2 \tag{1.19}$$

Соотношение (1.19) представляет собой нелинейное интегральное уравнение относительно $p(x,\ t)$, которое можно решить методом последовательных приближений. В первом приближении можно считать, что в момент удара поверхность жидкости не деформировалась, то есть удар пластинки рассматривается как удар о жесткое полупространство. При таком предположении

$$\int\limits_0^x \Delta\varepsilon(\xi,\ t)\, d\xi = 0, \quad \varepsilon(x,\ t) = 0$$

и формулы для скорости и давления газа сильно упрощаются

$$v_1^{*} = \frac{xc}{\delta_0 - ct} \tag{1.20}$$

$$p_1(x,\ t) = p_0 - \frac{\rho_1 c^2}{2}\frac{x^2}{(\delta_0 - ct)^2} \tag{1.21}$$

Найдем время замыкания пластинки с жидкостью, то есть время, при

котором давление газа в крайних точках пластинки ($x = \pm a$) обращается в нуль

$$\frac{p_0}{\rho_1} = \frac{a^2 c^2}{2(\delta_0 - ct)^2}, \qquad t_{зам} = \frac{\delta}{c} - a\sqrt{\frac{\rho_1}{2p_0}} \tag{1.22}$$

Таким образом, в момент удара под пластинкой образуется газовая подушка, где в момент замыкания давление распределяется по следующему закону:

$$p_1 = p_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \tag{1.23}$$

Распределение давления в газовой подушке во втором приближении определяется подстановкой (1.21) в (1.19)

$$p_2(x, t) = p_0 - \frac{\rho_1}{2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{xc - \frac{\rho_1 c^2}{2\pi p_0} v.\,p. \int\limits_{-a}^{+a} \left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi}\right)\xi^2 d\xi \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(\delta_0 - c\tau)^2}}{\delta_0 - ct + \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\rho_1 c^2}{2\pi p_0} v.\,p. \int\limits_{-a}^{+a} \frac{\xi^2 d\xi}{\xi - x} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(\delta_0 - c\tau)^2}\right] d\tau} \right\}^2 \tag{1.24}$$

Выполняя вычисления интегралов, входящих в выражение (1.24), окончательно получим

$$p_2(x, t) = p_0 - \frac{\rho_1}{2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{xc - \frac{\rho_1 c^2}{2\pi p_0 \delta_0}\left(2ax + x^2 \ln\frac{a - x}{x + a}\right)\frac{t}{\delta_0 - ct}}{\delta_0 - ct - \frac{\rho_1}{\pi p_0 \delta_0}\left(ct + \delta_0 \ln\frac{\delta_0 - ct}{\delta_0}\right)\left(a + x\ln\frac{a - x}{x + a} - \frac{ax^2}{a^2 - x^2}\right)} \right\}^2 \tag{1.25}$$

Выражение в фигурных скобках представляет собой скорость газа $v^*(x, t)$ во втором приближении. Нетрудно заметить, что давление $p_2(x, t)$ и скорость $v_2^*(x, t)$ имеют особенности в крайних точках пластинки, что является вполне возможным, так как в этих точках не исключено разбрызгивание частиц жидкости. Но эта особенность может быть устранена. Действительно, при стремлении x к $\pm a$

$$\frac{1}{a^2 - x^2} \tag{1.26}$$

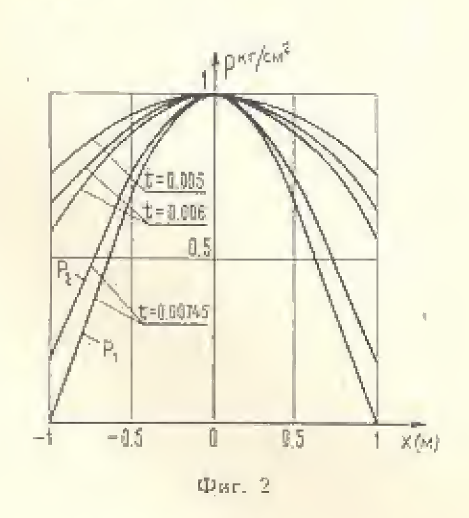
есть бесконечно большая величина более высокого порядка, чем

$$\ln\frac{a - x}{x + a}$$

следовательно, разделив все члены, находящиеся в фигурных скобках выражения (1.25), на $\frac{1}{a^2 - x^2}$ и переходя к пределу, получим

$$\lim_{x \to \pm a} p_2(x, t) = p_0, \quad \lim_{x \to \pm a} v^*(x, t) = 0$$

Время замыкания, как видно из (1.25), трудно представить аналитически, поэтому оно определяется численным способом для конкретного примера. Вычисления проведены при следующих начальных данных: в качестве газа и жидкости приняты воздух и вода, соответственно, полуширина пластинки $a = 1 м$, начальное расстояние пластинки от жидкости $\lambda_0 = 0.1 м$, плотность воздуха $\rho_1 = 0.13 \frac{кгсек^2}{м^4}$, плотность воды $\rho_0 = 100 \frac{кгсек^2}{м^4}$.



Фиг. 2

На фиг. 2 показаны графики изменения давления в газовой подушке в первом и во втором приближении в зависимости от времени ($t \leqslant t_{зам}$). В начале движения пластинки ($t \leqslant 0.005\, сек$) это изменение незначительно и давления $p_1(x, t)$, $p_2(x, t)$ идеально совпадают. В последующем периоде движения происходит резкое падение давления при приближении к краям пластинки, однако распределения давлений $p_1(x, t)$ и $p_2(x, t)$ с некоторой точностью совпадают, что позволяет принять время замыкания для обеих давлений одинаковым.

В работе [4] для распределения импульсивных давлений по пластинке при жестком ударе (без наличия газа) получен эллиптический закон

$$p_i = \rho_0 ac \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

В рассматриваемом нами случае распределение давления подчиняется параболическому закону, что обусловлено образованием воздушной подушки, которая смягчает удар и играет демпфирующую роль.

2. В предыдущем параграфе рассмотренная нами задача будет более точно поставлена, если учесть также фактор сжимаемости среды, при наличии которой происходит удар.

При такой постановке задачи уравнением движения сжимаемости газа будет служить общее уравнение движения сплошной среды [5]

$$\vec{W} = \vec{Q} + \frac{1}{\rho_1} \operatorname{div} \Pi \qquad (2.1)$$

где $\vec{W}$—ускорение частицы газа,

$\vec{Q}$—вектор массовой силы,

Π—тензор напряжений

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}$$

В двухмерной системе при отсутствии массовых сил уравнение (2.1) в декартовых координатах примет вид

$$\begin{aligned} \rho_1\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) &= \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} \\ \rho_1\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) &= \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} \end{aligned} \qquad (2.2)$$

причём

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} \\ p_{xy} &= p_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \\ p_{yy} &= -p - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y} \end{aligned} \qquad (2.3)$$

где v_x, v_y—компоненты скорости сжимаемого газа по осям Ox и Oy соответственно, μ—коэффициент вязкости газа.

Подставляя (2.3) в (2.2), получим

$$\rho_1\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right]-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\right]$$

$$\rho_1\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+2\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right]-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\right] \quad (2.4)$$

Основываясь на полученных результатах в предыдущей задаче, можно сделать следующий вывод: изменение давления в газовом слое между пластинкой и жидкостью происходит через некоторое время с момента движения пластинки (в приведенном примере это время равно 0,005 *сек*), в результате чего отношение толщины газового слоя к ширине пластинки становится настолько малым (порядка 10^{-2}), что движение газа в этом тонком слое можно считать ламинарным с малым числом Рейнольдса. Это дает возможность пренебречь в (2.4) инерционными членами по сравнению с членами, учитывающими вязкие силы и изменение давления. Далее, так как коэффициент вязкости μ можно приближенно принять постоянным, то в (2.4) отпадают или могут быть приняты очень малыми члены, содержащие $d\mu$.

После таких допущений уравнения (2.4) принимают вид

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) \quad (2.5)$$

В гидродинамической теории газовой смазки, где рассматриваются движения в тонких слоях, уравнения (2.5) упрощаются, исходя из того, что порядок величин слагаемых, входящих в эти уравнения, неодинаков. В частности, в [6] составлена таблица, где приведены относительные порядки величин производных, входящих в уравнения движения (см. табл.).

Таблица 1

Производные	Порядок величин
$\partial^2 v_x/\partial y^2$	1
$\partial v_x/\partial y$; $\partial^2 v_y/\partial y^2$; $\partial^2 v_x/\partial x\partial y$	$h/2a$
$\partial^2 v_x/\partial x^2$; $\partial v_x/\partial x$; $\partial v_y/\partial y$	$(h/2a)^2$
$\partial^2 v_y/\partial x^2$; $\partial v_y/\partial x$	$(h/2a)^3$

где h — ширина слоя.

Если отбросить в (2.5) малые величины относительно единицы, уравнения движения газа окончательно примут вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{2.6}$$

Второе уравнение (2.6) показывает, что давление в газовом слое не зависит от y, поэтому, интегрируя первое уравнение дважды по y, получим

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + A_1 y + A_2 \tag{2.7}$$

A_1, A_2 — постоянные интегрирования, которые определяются из следующих граничных условий:

$$\text{при} \quad y = \varepsilon(x, t); \quad v_x = 0, \quad v_y = \frac{\partial \varepsilon(x, t)}{\partial t}$$
$$y = \delta(t); \quad v_x = 0, \quad v_y = \frac{\partial \delta(t)}{\partial t} \tag{2.8}$$

Используя (2.8), из (2.7) получим систему уравнений относительно A_1 и A_2

$$A_1 \delta(t) + A_2 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \delta^2(t)$$

$$A_1 \varepsilon(x, t) + A_2 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \varepsilon^2(x, t)$$

откуда

$$A_1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} [\delta(t) + \varepsilon(x, t)]$$

$$A_2 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \delta(t) \varepsilon(x, t)$$

или же, подставляя эти значения в (2.7), будем иметь

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} [\delta(t) \varepsilon(x, t) - y [\delta(t) + \varepsilon(x, t)] + y^2] \tag{2.9}$$

Для сжимаемого газа уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_1 v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_1 v_y)}{\partial y} = 0 \tag{2.10}$$

Умножим (2.10) на dy и проинтегрируем от $\varepsilon(x, t)$ до $\delta(t)$

$$\int_{\varepsilon(x,t)}^{\delta(t)} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \partial y + \int_{\varepsilon(x,t)}^{\delta(t)} \frac{\partial (\rho_1 v_x)}{\partial x} dx + \int_{\varepsilon(x,t)}^{\delta(t)} \frac{\partial (\rho_1 v_y)}{\partial y} dy = 0 \qquad (2.11)$$

Из правила дифференцирования интегралов по параметру, когда пределы интегрирования зависят от параметра, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\varepsilon(x,t)}^{\delta(t)} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} dy = \int_{\varepsilon(x,t)}^{\delta(t)} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} dy + \frac{\partial \delta(t)}{\partial t} \rho_1 - \frac{\partial \varepsilon(x,t)}{\partial t} \rho_{1\varepsilon}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\varepsilon(x,t)}^{\delta(t)} (\rho_1 v_x) dy = \int_{\varepsilon(x,t)}^{\delta(t)} \frac{\partial (\rho_1 v_x)}{\partial x} dy - \frac{\partial \varepsilon(x,t)}{\partial x} \rho_{1\varepsilon} v_{x\varepsilon} \qquad (2.12)$$

а также

$$\int_{\varepsilon(x,t)}^{\delta(t)} \frac{\partial (\rho_1 v_y)}{\partial y} dy = \rho_{1\delta} v_{y\delta} - \rho_{1\varepsilon} v_{y\varepsilon} \qquad (2.13)$$

где индексы по δ и ε показывают значения данных величин на пластинке и границе жидкости, соответственно. Используя граничные условия (2.8) и независимость плотности газа от y, из (2.12) и (2.13) получим

$$\int_{\varepsilon(x,t)}^{\delta(t)} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} dy = \frac{\partial}{\partial t} \rho_1 [\delta(t) - \varepsilon(x,t)] + \rho_1 \left[\frac{\partial \varepsilon(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial \delta(t)}{\partial t} \right]$$

$$\int_{\varepsilon(x,t)}^{\delta(t)} \frac{\partial (\rho_1 v_x)}{\partial x} \partial y = \frac{\partial}{\partial x} \rho_1 \int_{\varepsilon(x,t)}^{\delta(t)} v_x dy \qquad (2.14)$$

$$\int_{\varepsilon(x,t)}^{\delta(t)} \frac{\partial (\rho_1 v_y)}{\partial y} dy = \rho_1 \left[\frac{\partial \delta(t)}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon(x,t)}{\partial t} \right]$$

Подставляя (2.14) в (2.11), уравнение неразрывности приведем к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_1 [\delta(t) - \varepsilon(x,t)] + \frac{\partial}{\partial x} \rho_1 \int_{\varepsilon(x,t)}^{\delta(t)} v_x dy = 0 \qquad (2.15)$$

Имея значение v_x в виде (2.9), нетрудно вычислить интеграл, стоящий в правой части выражения (2.15), который представляет из себя расход газа через сечение, перпендикулярное оси Ox

$$\int_{\varepsilon(x,t)}^{\delta(t)} v_x dy = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_{\varepsilon(x,t)}^{\delta(t)} \{\delta(t) \varepsilon(x,t) - y [\delta(t) + \varepsilon(x,t)] + y^2\} dy =$$

$$= -\frac{1}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} [\delta(t) - \varepsilon(x,t)]^3$$

Теперь (2.15) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_1[\delta(t)-\varepsilon(x,\ t)]-\frac{1}{12\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho_1\frac{\partial p}{\partial x}[\delta(t)-\varepsilon(x,\ t)]\right\}=0 \quad (2.16)$$

Возьмем состояние слабо-сжимаемого газа в виде Тета [5]:

$$p=B\left|\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^n-1\right| \quad (2.17)$$

где B—некоторая константа,

n—показатель политропы,

ρ_0—начальная плотность газа,

p—изменение давления в газе относительно начального давления.

Из (2.17) имеем

$$\rho_1=\rho_0\left(\frac{p}{B}+1\right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.18)$$

$$\rho_1\frac{\partial p}{\partial x}=\rho_0\left(\frac{p}{B}+1\right)^{\frac{1}{n}}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{Bn\rho_0}{n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{B}+1\right)^{\frac{1+n}{n}} \quad (2.19)$$

Исключив в (2.16) плотность при помощи (2.18), получим дифференциальное уравнение, содержащее в качестве неизвестной функции только давление

$$\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{p}{B}+1\right)^{\frac{1}{n}}[\delta(t)-\varepsilon(x,\ t)]\right\}-$$

$$-\frac{Bn\rho_0}{12\mu(n+1)}\frac{\partial}{\partial x}\left\{[\delta(t)-\varepsilon(x,\ t)]\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{B}+1\right)^{\frac{1}{n}}\right\}=0 \quad (2.20)$$

Это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением с частными производными относительно $p(x,\ t)$.

Начальное и граничные условия имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} p(x,\ t)|_{t=0}=0 \\ p(x,\ t)|_{x=+a}=0, \quad p(x,\ t)|_{x=-a}=0 \end{array}\right\} \quad (2.21)$$

Будем предполагать, что поверхность жидкости не деформируется, то есть $\varepsilon(x,\ t)=0$. Если такое предположение справедливо в случае несжимаемого газа, то естественно сделать такое допущение, когда газ сжимаемый. Вводя обозначение

$$\delta(t)\left(\frac{p}{B}+1\right)^{\frac{1}{n}}\equiv w(x,\ t) \quad (2.22)$$

уравнение (2.20) приводим к виду

$$\delta^{2-n}(t)\frac{\partial^2\omega^{n+1}}{\partial x^2}=A\frac{\partial\omega}{\partial t},\qquad A=\frac{12\mu(n+1)}{Bn} \tag{2.23}$$

со следующими начальным и граничными условиями:

$$\left.\begin{array}{l}\omega(x,t)|_{t=0}=\delta_0\\ \omega(x,t)|_{x=+a}=\delta(t),\quad \omega(x,t)|_{x=-a}=\delta(t)\end{array}\right| \tag{2.24}$$

Введем новую переменную

$$\zeta=\frac{1}{A}\int_0^t\delta^{2-n}(\tau)\,d\tau$$

тогда

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}\left[\frac{\delta^{2-n}(t)}{A}\right]$$

и уравнение (2.22) примет вид

$$\frac{\partial^2\omega^{n+1}}{\partial x^2}=\frac{\partial\omega}{\partial\zeta} \tag{2.25}$$

с начальным условием

$$\omega(x,\zeta)|_{\zeta=0}=\delta_0 \tag{2.26}$$

и с граничными условиями

$$\omega(x,\zeta)|_{x=+a}=\delta(\zeta),\quad \omega(x,\zeta)|_{x=-a}=\delta(\zeta) \tag{2.27}$$

Из (2.22) следует, что ω—положительная функция. Уравнение (2.25) при $\omega>0$ является нелинейным параболическим уравнением. Частным значениям показателя политропы n для воздуха соответствуют различные процессы: изобарный ($n=0$), изотермический ($n=1$), адиабатический ($n=1.4$). В случае сжимаемого газа область изменения показателя n ограничена и будет находиться между изотермой и адиабатой: $1\leqslant n\leqslant k$.

В случае изотермического режима ($n=1$) уравнение (2.25) приводится к известному уравнению Буссинеска, которое достаточно исследовано [7, 8]. Будем рассматривать случай, когда $n\neq 0$, $n\neq 1$.

Введем новую функцию

$$\theta(x,\zeta)=\omega^{n+1}(x,\zeta),\quad \text{тогда}\quad \omega(x,\zeta)=\theta^{\frac{1}{n+1}}(x,\zeta)=f(\theta)$$

$$\frac{\partial\omega(x,\zeta)}{\partial\zeta}=f_\theta'(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial\zeta},\qquad f_\theta'(\theta)=(n+1)^{-1}\theta^{-\frac{n}{n+1}}\equiv\Phi(\theta)$$

После этих выкладок уравнение (2.25) приводится к квазилинейному уравнению параболического типа

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\Phi(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial\zeta} \tag{2.28}$$

с начальным условием

$$\theta(x, \zeta)|_{\zeta=0} = \delta_0^{n+1} \tag{2.29}$$

и с граничными условиями

$$\theta(x, \zeta)|_{x=-a} = \delta^{n+1}(\zeta), \quad \theta(x, \zeta)|_{x=a} = \delta^{n+1}(\zeta) \tag{2.30}$$

Уравнение типа (2.28) встречается в теории фильтрации при одномерном нестационарном процессе.

Решение задачи Коши и основных краевых задач в ограниченных и неограниченных областях для уравнений типа (2.28) дано в работах [2, 3]. В нашем случае функции $\theta(x, \zeta)$ и $\Phi(\theta)$ полностью удовлетворяют тем же условиям, которые приведены в вышеуказанных работах.

Построим следующую систему уравнений типа

$$\begin{gathered}
\theta_0(x, \zeta) = \theta(x, \zeta)|_{\zeta=0} = \delta_0^{n+1} \\
\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2} = \Phi(\theta_0)\frac{\partial\theta_1}{\partial\zeta} \\
\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2} = \Phi(\theta_1)\frac{\partial\theta_2}{\partial\zeta} \\
\text{---------} \\
\frac{\partial^2\theta_n}{\partial x^2} = \Phi(\theta_{n-1})\frac{\partial\theta_n}{\partial\zeta}
\end{gathered} \tag{2.31}$$

Последовательно решая систему уравнений параболического типа (2.31) при начальном и граничных условиях (2.29) и (2.30), получим последовательность решений $\{\theta_j(x, \zeta)\}$.

В [2, 3] доказано, что последовательность $\{\theta_j(x, \zeta)\}$ сходится при $j \to \infty$:

$$\lim_{j\to\infty}\{\theta_j(x, \zeta)\} = \theta(x, \zeta)$$

где $\theta(x, \zeta)$ — обобщенное решение уравнения (2.28). Для уравнения (2.25) соответствующая последовательность будет

$$\{\omega_j(x, \zeta)\} = \{f[\theta_j(x, \zeta)]\}$$

аналогичным образом получим

$$\lim_{j\to\infty}\{\omega_j(x, \zeta)\} = \lim_{j\to\infty}\{f[\theta_j(x, \zeta)]\} = \omega(x, \zeta)$$

где $\omega(x, \zeta)$ будет обобщенным решением уравнения (2.25). Сделаем обозначения для первого приближения:

$$F(\xi, \zeta) = \theta(\xi, \zeta) - \delta^{n+1}(\zeta), \quad \xi = x + a,$$

тогда уравнение (2.28) приводится к виду

$$\frac{\partial F}{\partial\zeta} = b^2\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} + g(\zeta); \qquad b^2 = \Phi^{-1}(\theta_0); \qquad g(\zeta) = -[\delta^{n+1}(\zeta)]'_\zeta \quad l = 2a \tag{2.32}$$

с начальным условием

$$F(\xi, \zeta)|_{\zeta=0} = 0 \tag{2.33}$$

и с граничными условиями

$$F(\xi, \zeta)|_{\xi=0} = 0, \quad F(\xi, \zeta)|_{\xi=l} = 0 \tag{2.34}$$

Решение задачи (2.32), (2.33) и (2.34) находится методом Фурье в виде

$$F(\xi, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_0^{\zeta} e^{-\lambda_j^2(\zeta-\tau)} g_j(\tau) d\tau \right] \sin \frac{j\pi\xi}{l} \tag{2.35}$$

где

$$g_j(\zeta) = \frac{2}{l} \int_0^l g(\zeta) \sin \frac{j\pi\xi}{l} d\xi = -\frac{2g(\zeta)}{j\pi} \cos \frac{j\pi\xi}{l} \Big|_0^l = \frac{2g(\zeta)}{j\pi} [1 - (-1)^j] \tag{2.36}$$

имеем

$$\zeta = \frac{1}{A} \int_0^t (\delta_0 - c\tau)^{2-n} d\tau = -\frac{1}{Ac(3-n)} [(\delta_0 - ct)^{3-n} - \delta_0^{3-n}]$$

находя отсюда t и подставляя в $\delta_0 - ct$, получим

$$\delta(\zeta) = \sqrt[3-n]{\delta_0^{3-n} - Ac(3-n)\zeta} \tag{2.37}$$

$$g(\zeta) = Ac(n+1)[\delta_0^{3-n} - Ac(3-n)\zeta]^{\frac{2(n-1)}{3-n}}$$

Подставляя (2.36) в (2.35), окончательно для $F(\xi, \zeta)$ получим

$$F(\xi, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2Ac(n+1)}{j\pi} [1 - (-1)^j] \int_0^{\zeta} e^{-\lambda_j^2(\zeta-\tau)} [\delta_0^{3-n} -$$

$$- Ac(3-n)\tau]^{\frac{2(n-1)}{3-n}} \sin \frac{j\pi\xi}{l} d\tau \tag{2.38}$$

Для $\theta(\xi, \zeta)$ и $\omega(\xi, \zeta)$ будем иметь

$$\theta(\xi, \zeta) = F(\xi, \zeta) + \delta^{n+1}(\zeta)$$

$$\omega(\xi, \zeta) = \sqrt[n+1]{F(\xi, \zeta) + \delta^{n+1}(\zeta)}$$

Теперь из (2.22) нетрудно определить значение $p(x, \zeta)$

$$p(x, \zeta) = B \left\{ \frac{\sqrt[n+1]{[F(x+a, \zeta) + \delta^{n+1}(\zeta)]^n}}{\delta^n(\zeta)} - 1 \right\} \tag{2.39}$$

или же подставляя значения $F(x+a, \zeta)$ и $\delta(\zeta)$ из (2.45) и (2.44), соответственно, окончательно для давления получим

$$p(x, \zeta) = -B + B^{n-3}\left[\zeta_0^{3-n} - Ac(3-n)\zeta\right]^{*}\left\{\left[\zeta_0^{3-n} - Ac(3-n)\zeta\right]^{\frac{n+1}{3-n}} +\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2Ac(n+1)}{j\pi}\left[1-(-1)^j\right]\sin\frac{j\pi(x+a)}{2a}\int_0^{\zeta} e^{-\lambda_j^2(\zeta-\tau)}\left[\zeta_0^{3-n} -\right.$$

$$\left.\left. - Ac(3-n)\tau\right]^{\frac{2(n-1)}{3-n}} d\tau\right\}^{\frac{n}{n+1}} \qquad (2.40)$$

При изотермическом процессе выражение (2.40) достаточно упрощается

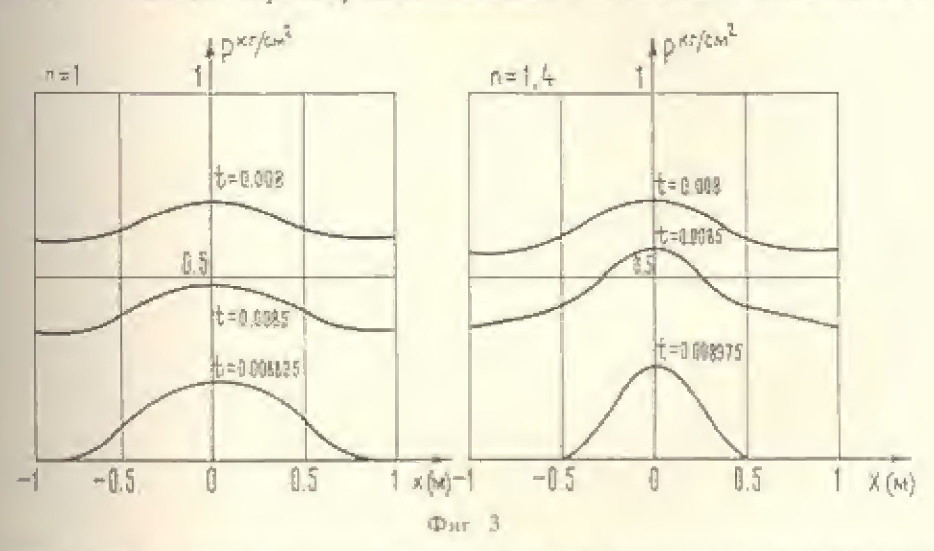
$$p(x, \zeta) =$$

$$=\left\{\sqrt{\frac{\zeta_0^2 - 2Ac\zeta + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{4Ac}{j\pi}\left[1-(-1)^j\right]\frac{1-e^{-\lambda_j^2\zeta}}{\lambda_j^2}\sin\frac{j\pi(x+a)}{2a}}{\zeta_0^2 - 2Ac\zeta}} - 1\right\}B$$

где

$$\zeta = \frac{1}{Ac(3-n)}\left[(\zeta_0 - ct)^{3-n} - \zeta_0^{3-n}\right]$$

Для нахождения времени замыкания между пластинкой и жидкостью с теми же характерными данными, что и для предыдущей за-



Фиг 3

дачи, и при степени политропы $n = 1$, $n = 1.4$ проведены определенные расчеты. Время замыкания в случае изотермических ($n = 1$) и адиабадических ($n = 1.4$) режимов получено, соответственно, 0.008835 *сек*

и 0.008975 *сек*. Если подставить эти значения в формулу (2.40), то получим распределение давления в газовой подушке в момент замыкания.

На фиг. 3 приведен вид кривых распределения давления для вышеуказанных двух режимов, которые соответствуют как моментам до замыкания, так и моменту времени замыкания. Сравнивая эти кривые с кривыми, полученными для несжимаемого газа, замечаем, что амплитуда распределения давления меньше в случае сжимаемого газа. Это явление объясняется тем, что элементарные объемы газа во время сжимания действуют в качестве пружин, которые в виде волн передают жидкости усилия, возникающие в газовом слое и этим самым влияют на падение общего суммарного усилия.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила 10 VII 1972

Ն. Գ. ԱՍՐՅԱՆ

ԿՈՇՏ ԹԻԹԵՂԻ ՀԱՐՎԱԾԸ ԱՆՍԵՂՄԵԼԻ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻՆ, ՆՐԱՆՑ ՄԻՋԵՎ ԳԱԶԱՅԻՆ ՇԵՐՏԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում դիտարկվում է կոշտ թիթեղի հարվածը անսեղմելի հեղուկին, երբ նրանց միջև առկա է անսեղմելի և սեղմելի գազ։

Անսեղմելի գազի դեպքում խնդիրը բերվում է գազային շերտում ճնշման բաշխման ֆունկցիայի նկատմամբ ոչ-գծային ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։ Սեղմելի գազի դեպքում, պարզեցնելով գազային շերտում հոծ միջավայրի շարժման ընդհանուր հավասարումները, ճնշման բաշխման ֆունկցիայի որոշումը բերվում է պարաբոլիկ տիպի ինտեգրալային հավասարման լուծմանը։

Վերոհիշյալ երկու դեպքերի համար կոնկրետ օրինակի վրա, կատարված են թվային հաշվարկներ։ Որոշված են թիթեղի՝ հեղուկի հետ կպչելու ժամանակի մոմենտները և ճնշման բաշխումը գազային բարձիկում։

IMPACT OF A HARD PLATE AGAINST THE SURFACE OF NON-COMPRESSIBLE LIQUID WITH A GAS LAYER BETWEEN THEM

N. G. ASRIAN

S u m m a r y

Impact of a hard plate against the surface of non-compressible liquid with non-compressible or compressible gas between them is examined.

In the case of non-compressible gas the problem is reduced to solving a non-linear integral equation with respect to the function of pressure distribution in the gas layer. With compressible gas, however, simplifying the general equations of continuous medium dislocation in the gas layer, the problem of determining the pressure function is reduced to solving a quasi-linear equation of a parabolic type.

Numerical calculation is performed for the above two cases.

For the same cases the time instants of the plate interlocking with liquid and of pressure distribution in the gas cushion are also determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А., Келдыш М. В., Маркушевич А. И., Седов Л. И.* и *Лотов А. В.* Сб. статей по вопросам удара о поверхность воды. Тр. ЦАГИ, вып. 152, 1935.
2. *Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй Линь.* Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР, сер. математика, т. 22, № 5, 1958.
3. *Олейник О. А., Вентцель Т. Д.* Первая краевая задача и задача Коши для квазилинейных уравнений параболического типа. „Математический сборник", т. 41 (83), № 1, 1957.
4. *Седов Л. И.* Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости. Тр. ЦАГИ, вып. 187, 1934.
5. *Станюкович К. П.* Неустановившееся движение сплошной среды. Гостехиздат, М., 1955.
6. *Tipei N.* Hidro-aerodinamica lubricatiei. Ed. Acad. R.P.R., Bucuresti, 1957.
7. *Баренблатт Г. И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, т. 16, вып. 1, 1952.
8. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Об одном нелинейном уравнении в частных производных, встречающемся в теории фильтрации. Докл. АН СССР, 63, № 6, 1948.